

CAPITOLO 3

IDRAULICA DELLE CORRENTI A SUPERFICIE LIBERA

1. Le equazioni di De Saint Venant

Lo studio del moto delle acque negli alvei naturali si basa sostanzialmente sul modello della corrente lineare, che descrive il moto di un fluido con linee di corrente parallele fra loro e velocità trasversali costantemente nulle; in tali condizioni la distribuzione della pressione nelle sezioni trasversali è idrostatica, ovvero la quota piezometrica è costante su di esse. Il modello implica che l'alveo sia cilindrico ed il pelo libero parallelo alla linea di fondo, condizioni queste che non si verificano nel caso delle correnti idriche defluenti entro alvei naturali; se però le variazioni delle sezioni bagnate e delle velocità nello spazio e nel tempo sono gradualmente variate, la forma della corrente è con buona approssimazione quasi cilindrica, le velocità sono approssimativamente ortogonali alle sezioni trasversali e la distribuzione della pressione in tali sezioni idrostatica; la corrente viene detta perciò *gradualmente variata*. A stretto rigore rientra in questo schema la propagazione delle onde di piena caratterizzate da piccole curvature del pelo libero.

Indicando rispettivamente con θ l'angolo formato dalla tangente alla linea di fondo rispetto all'orizzontale (Figura 1), in genere è $\sin\theta \ll 1$ (al massimo pari a qualche percento) e perciò $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$ e $\cos\theta \approx 1$; in queste condizioni le sezioni trasversali sono praticamente verticali, dato che esse coincidono praticamente con quelle ortogonali alle linee di corrente. Le equazioni che descrivono il moto vario delle correnti gradualmente variate (equazione di continuità ed equazione dinamica) si ricavano assumendo che il moto sia monodimensionale e si sviluppi in direzione dell'asse dell'alveo; indicata con x l'ascissa corrispondente alla generica sezione normale (misurata lungo la linea di fondo), si assume perciò che le variabili che descrivono lo stato della corrente dipendano solo da x e dal tempo t . Includendo gli effetti di eventuali afflussi e deflussi laterali distribuiti, l'equazione di continuità per correnti lineari assume la forma

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = q_e - q_u, \quad (1)$$

dove $Q = Q(x, t)$, $A = A(x, t)$, $q_e(x, y, t)$ e $q_u(x, y, t)$ indicano rispettivamente la portata transitante attraverso la sezione posta in x , l'area della sezione bagnata e le portate per unità di lunghezza degli afflussi e deflussi laterali distribuiti.

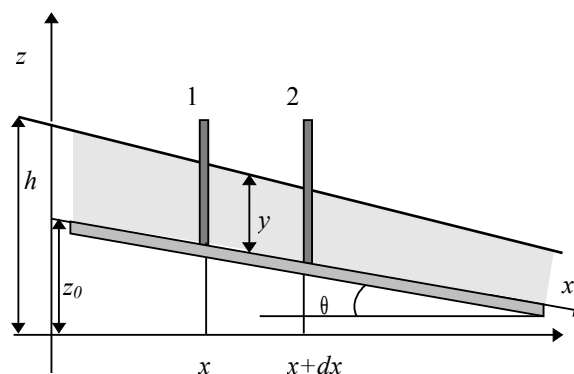


Figura 1 Tronco elementare di corrente

L'equazione del moto si ricava imponendo che la variazione nell'unità di tempo della quantità di moto in direzione x del volume materiale V compreso all'istante t tra le sezioni 1 e 2 di figura uguagli la componente F_x lungo x della risultante delle forze esterne agenti su V ; nelle ipotesi di correnti gradualmente variate e di piccole pendenze essa assume la forma

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{q_e U}{gA} + j = 0, \quad H = h + \frac{U^2}{2g} = z_0 + y + \frac{U^2}{2g}, \quad (2)$$

dove H indica il carico totale della corrente (avendo posto uguali all'unità il coefficiente α di ragguaglio delle potenze cinetiche essendo le velocità nelle sezioni trasversali poco variabili da punto a punto) mentre j indica la perdita di carico per unità di lunghezza della corrente dovuta alle resistenze continue.

Nella pratica gli afflussi laterali continui provengono dai versanti confinanti con l'alveo in direzione pressoché normale all'asse dello stesso; il contributo di eventuali affluenti deve essere invece trattato separatamente. I deflussi laterali derivano invece dalla tracimazione continua lungo le linee di sponda. Le espressioni delle funzioni $q_e(x, y, t)$ e $q_u(x, y, t)$ vanno determinate in base a modelli idrologici costruiti ad hoc in base alle caratteristiche delle aree contribuenti e, per quanto riguarda i deflussi, a quelle dell'alveo e delle portate massime in esso defluenti. Per quanto riguarda poi il contributo di q_e nell'equazione del moto, esso viene generalmente considerato trascurabile e comunque di entità inferiore alle incertezze connesse con il suo calcolo.

Per quanto riguarda le resistenze al moto, è consuetudine esprimere la perdita di carico j nella forma

$$j = \frac{U^2}{\chi^2 R}, \quad (3)$$

dove $R = A/P$, rapporto tra area e perimetro della sezione bagnata è il raggio idraulico e χ prende il nome di coefficiente di resistenza di Chezy; esso viene calcolato assumendo le stesse leggi di resistenza stabilite per il caso di moto uniforme. Per i canali a pelo libero, ove il moto avviene ordinariamente in regime assolutamente turbolento, χ risulta dunque funzione solo delle caratteristiche geometriche e fisiche della sezione:

$$\chi = \chi(\varepsilon, f), \quad (4)$$

dove ε indica la scabrezza equivalente e f un coefficiente di forma, sicché la perdita di carico diviene una funzione puramente quadratica della velocità della corrente. Trascurando il contributo del fattore di forma, come è consuetudine fare nelle applicazioni ai corsi d'acqua naturali, e adottando per la legge di resistenza (4) la ben nota formula di Gauckler-Strickler si ha

$$\chi = k_s R^{\frac{1}{6}}, \quad (5)$$

in cui il coefficiente di scabrezza è fornito dal parametro dimensionale k_s detto appunto indice di scabrezza di Strickler, il più usato nelle applicazioni relative agli alvei naturali.

Supposto l'alveo indeformabile, le grandezze che definiscono lo stato della corrente sono due: una geometrica (altezza d'acqua y o quota del pelo libero z) e una cinematica

(velocità U o portata Q). Queste grandezze sono funzioni delle variabili x e t (moto monodimensionale); in particolare si ha

$$A = A(x, y(x, t)), \quad y(x, t) = z(x, t) - z_0(x). \quad (6)$$

Le equazioni di De Saint Venant si ricavano dalle equazioni (1) e (2) ricordando le formule (3.10) e (3.12); in termini delle variabili Q e z si può dunque scrivere, con $U = Q/A$:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial t} = q_e - q_u, \quad (7)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + g A \frac{\partial z}{\partial x} + g A j + U q_u = 0. \quad (8)$$

dove $b = \partial A / \partial y$ è la larghezza della sezione in corrispondenza del pelo libero.

Le equazioni di De Saint Venant costituiscono un sistema iperbolico di equazioni differenziali a derivate parziali del primo ordine nelle variabili dipendenti $Q(x, t)$ e $z(x, t)$ (o $y(x, t)$). Dal punto di vista applicativo interessa determinare l'andamento temporale delle portate e delle altezze d'acqua in tutte le sezioni del tronco di fiume in esame durante l'evento di piena; a questo scopo è necessario conoscere i valori di Q e y (o z) lungo l'intero tronco di fiume al tempo $t = 0$, assunto come istante iniziale del fenomeno in studio, (condizioni iniziali) e l'andamento temporale delle due grandezze in una sezione del tronco d'alveo (non necessariamente la stessa) per tutta la durata della piena oppure l'andamento temporale di una qualunque delle due grandezze in due sezioni distinte (condizioni al contorno). La condizione al contorno relativa ad una generica sezione può anche essere espressa come legame funzionale fra le due variabili dipendenti in quella sezione. Sebbene da un punto di vista puramente matematico l'esistenza e l'unicità della soluzione delle equazioni di De Saint Venant sia assicurata una volta prescritte le condizioni suddette, poiché la soluzione delle equazioni viene ordinariamente costruita per via numerica risulta che, allo scopo di assicurare la convergenza dei calcoli, le due condizioni al contorno debbono essere date una nell'estremo di monte e l'altra nell'estremo di valle del tronco di fiume in esame nel caso in cui la corrente sia lenta; ciascuna condizione può essere indifferentemente del tipo $Q(t)$ o $z(t)$ (oppure $y(t)$). In genere nella sezione di monte viene assegnato l'andamento temporale delle portate, mentre in quella di valle viene assegnato l'andamento temporale delle altezze d'acqua o il legame $Q = Q(y)$ fornito dalla scala di deflusso di moto uniforme. Nel caso di corrente veloce le due condizioni al contorno devono essere assegnate entrambe nell'estremo di monte del tronco di fiume.

2. Schemi numerici a differenze finite per l'integrazione delle equazioni di De Saint Venant

La non linearità delle equazioni di De Saint Venant rende impossibile la loro integrazione per via analitica, se non in pochissimi casi semplici e schematici; d'altra parte, nelle applicazioni agli alvei naturali grandezze come il raggio idraulico R , l'area della sezione bagnata A , il coefficiente di resistenza χ , che dipendono dalla geometria della sezione, non si possono rappresentare mediante espressioni analitiche. Dato che non è possibile risolvere il problema analiticamente, le soluzioni vanno generalmente ricercate attraverso tecniche di integrazione numerica basate su schemi alle differenze finite o agli elementi finiti. Il metodo delle differenze finite è ancora oggi il più usato,

data la semplicità di implementazione; esso prevede sostanzialmente l'approssimazione delle derivate parziali mediante rapporti incrementali finiti. Il sistema di equazioni differenziali, valide nel continuo spazio-temporale, viene così trasformato in un sistema di equazioni algebriche che consentono di determinare i valori della soluzione in un numero finito di punti del piano cinematico, cioè in un numero finito di sezioni e in un numero finito di istanti temporali; la soluzione del problema originario è fornita dal limite a cui tende la soluzione numerica al tendere a zero degli intervalli spaziali e temporali che separano i punti di calcolo.

La rappresentazione della derivata attraverso un rapporto incrementale introduce ovviamente nella valutazione della derivata stessa un errore tendente a zero con il tendere a zero del passo di calcolo; l'ordine della quantità infinitesima costituita da tale errore definisce anche l'ordine di accuratezza dello schema di calcolo adottato. Nel caso delle equazioni di De Saint Venant le funzioni interessate dipendono da due variabili: l'ascissa x ed il tempo t ; dividendo l'asse x in intervalli elementari Δx e l'asse t in intervalli elementari Δt (Figura 2), per la generica funzione $f(x, t)$ si pone $f_i^k = f(i\Delta x, k\Delta t)$.

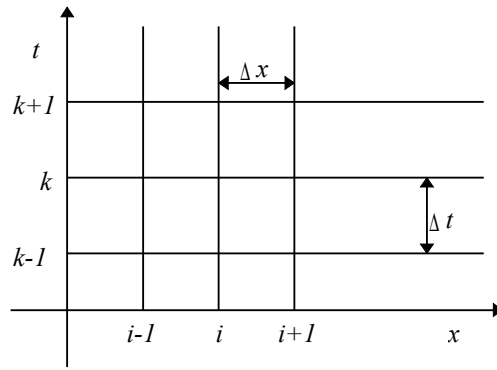


Figura 2 Griglia di calcolo per gli schemi a differenze finite

Per le derivate spaziali della f si possono usare rappresentazioni esplicite o implicite; le seconde sono espresse in funzione di quantità incognite, come si vedrà in seguito. Il diverso ruolo delle variabili x e t dipende dal fatto che la soluzione numerica delle equazioni di De Saint Venant viene ottenuta avanzando da un istante di tempo al successivo: noti i valori di z e Q in tutte le sezioni di calcolo all'istante $k\Delta t$ si determinano i valori di z e Q in tutte le sezioni di calcolo all'istante $(k+1)\Delta t$ (a partire dalla conoscenza delle condizioni iniziali); perciò sono esplicite le rappresentazioni

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=i\Delta x} = \frac{f_i^k - f_{i-1}^k}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{backward}) \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=i\Delta x} = \frac{f_{i+1}^k - f_i^k}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{forward}) \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=i\Delta x} = \frac{f_{i+1}^k - f_{i-1}^k}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (\text{central}), \quad (11)$$

mentre sono implicite le rappresentazioni

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=i\Delta x} = \frac{f_i^{k+1} - f_{i-1}^{k+1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{backward}) \quad (12)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=i\Delta x} = \frac{f_{i+1}^{k+1} - f_i^{k+1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{forward}) \quad (13)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=i\Delta x} = \frac{f_{i+1}^{k+1} - f_{i-1}^{k+1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (\text{central}). \quad (14)$$

Un esempio di schema esplicito è quello dovuto a Lax, in cui per le derivate spaziali si usa la rappresentazione (14), mentre per quelle temporali si pone

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t=k\Delta t} = \frac{f_i^{k+1} - f^*}{\Delta t} + O(\Delta t), \quad f^* = \frac{1}{2}(f_{i-1}^k + f_{i+1}^k); \quad (15)$$

per la valutazione dei coefficienti si pone poi

$$f \approx f^* = \frac{1}{2}(f_{i-1}^k + f_{i+1}^k). \quad (16)$$

Se N è il numero delle sezioni di calcolo, il tronco di fiume in esame rimane suddiviso in $N - 1$ tronchi elementari; discretizzando le equazioni di De Saint Venant, per ciascun tronco elementare si possono scrivere due equazioni algebriche nelle incognite Q_{i+1}^{k+1} e z_{i+1}^{k+1} . Le incognite sono $2N$ (due per ogni sezione di calcolo), mentre il numero delle equazioni risulta essere $2N - 2$ (due per ogni tronco elementare); le due equazioni rimanenti debbono essere fornite dalle condizioni al contorno. Adottando uno schema esplicito, le equazioni relative ad un dato tronco elementare sono indipendenti da quelle relative agli altri tronchi perché compaiono solo le incognite Q_{i+1}^{k+1} e z_{i+1}^{k+1} , provenienti dalla discretizzazione delle derivate temporali. Adottando invece uno schema implicito, nelle equazioni relative ad un dato tronco oltre alle incognite Q_{i+1}^{k+1} e z_{i+1}^{k+1} compaiono altri termini incogniti del tipo Q_j^{k+1} e z_j^{k+1} , provenienti dalla discretizzazione delle derivate spaziali. In tal caso non è possibile risolvere separatamente il problema relativo a ciascun tronco elementare, ma occorre risolvere il sistema di $2N$ equazioni nelle incognite Q_s^{k+1} e z_s^{k+1} ($s = 1, \dots, N$) relativo all'intero tronco di fiume. D'altra parte gli schemi espliciti, che pure sono più semplici da implementare, risultano stabili solo a determinate condizioni sulle ampiezze dei passi spazio-temporali assunti per la discretizzazione; in caso contrario può accadere che la soluzione trovata numericamente non converga alla soluzione esatta del problema differenziale nel limite $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$. Più precisamente deve essere soddisfatta la condizione di Courant-Friedrichs-Lewy, che per le Equazioni di De Saint Venant assume la forma

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \geq |U| + c, \quad c = \sqrt{g y_m}; \quad (17)$$

in questo senso si dice che gli schemi espliciti sono *condizionatamente stabili*.

Scelto per l'ampiezza del passo spaziale Δx il valore più grande possibile, compatibilmente con l'esigenza di una corretta descrizione della geometria dell'alveo e della scala spaziale dell'evento in esame, il massimo valore ammissibile per il passo temporale Δt è imposto dalla condizione di Courant-Friedrichs-Lewy; questo porta spesso a passi di calcolo molto brevi rispetto alla scala temporale del fenomeno.

Al contrario degli schemi espliciti, gli schemi impliciti possono invece risultare *incondizionatamente stabili* e permettere quindi una maggior libertà nella scelta dell'ampiezza dei passi di discretizzazione.

Talvolta si introducono nella rappresentazione discreta delle derivate e dei coefficienti alcuni parametri che possono poi essere usati come ulteriori parametri di taratura del modello; ad esempio, definendo due parametri ψ e θ (di valore compreso tra 0 e 1) come coefficienti di peso spaziale e temporale, si possono rappresentare all'interno di ciascuna maglia le derivate spaziali e temporali attraverso una media pesata, rispettivamente temporale e spaziale, dei corrispondenti rapporti incrementali:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \theta \frac{f_{i+1}^{k+1} - f_i^{k+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) \frac{f_{i+1}^k - f_i^k}{\Delta x} \quad (18)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \psi \frac{f_{i+1}^{k+1} - f_{i+1}^k}{\Delta t} + (1 - \psi) \frac{f_i^{k+1} - f_i^k}{\Delta t}; \quad (19)$$

analogamente, i coefficienti che compaiono nelle equazioni differenziali sono valutati come media pesata dei valori assunti dagli stessi coefficienti in corrispondenza dei vertici della generica maglia. Ciò si può fare eseguendo dapprima le medie temporali tra i vertici di uguale ascissa e calcolando poi la media spaziale dei risultati:

$$f \approx \psi [\theta f_{i+1}^{k+1} + (1 - \theta) f_{i+1}^k] + (1 - \psi) [\theta f_i^{k+1} + (1 - \theta) f_i^k], \quad (20)$$

da cui

$$f \approx \theta \psi f_{i+1}^{k+1} + \theta (1 - \psi) f_i^{k+1} + \psi (1 - \theta) f_{i+1}^k + (1 - \psi)(1 - \theta) f_i^k. \quad (21)$$

Dato che la media è un'operazione lineare, eseguendo prima le medie spaziali e poi la media temporale dei risultati si sarebbe pervenuti allo stesso risultato (21). Discretizzando con questo metodo le equazioni di De Saint Venant (7)-(8), si possono scrivere al generico passo temporale $(k + 1)\Delta t$ $2N - 2$ equazioni algebriche (due per ogni maglia) nelle $2N$ incognite Q_s^{k+1} e z_s^{k+1} ($s = 1, \dots, N$); le due equazioni mancanti sono fornite dalle condizioni al contorno. Lo schema numerico descritto risulta esplicito per $\theta = 0$ e totalmente implicito per $\theta = 1$; per $\psi = 0.5$ si riduce al ben noto schema di Preissmann (1961), implementato in molti codici di calcolo commerciali, anche di recente creazione. La forma discretizzata che si ottiene per le Equazioni di De Saint Venant è in tal caso la seguente:

$$\theta \frac{Q_{i+1}^{k+1} - Q_i^{k+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) \frac{Q_{i+1}^k - Q_i^k}{\Delta x} + \frac{A_{i+1}^{k+1} + A_i^{k+1} - A_{i+1}^k - A_i^k}{2\Delta t} = 0 \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \frac{Q_{i+1}^{k+1} + Q_i^{k+1} - Q_{i+1}^k - Q_i^k}{2\Delta t} + \theta \frac{\left(\frac{Q^2}{A}\right)_{i+1}^{k+1} - \left(\frac{Q^2}{A}\right)_i^{k+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) \frac{\left(\frac{Q^2}{A}\right)_{i+1}^k - \left(\frac{Q^2}{A}\right)_i^k}{\Delta x} \\ & + g \frac{\theta (A_{i+1}^{k+1} + A_i^{k+1}) + (1 - \theta)(A_{i+1}^k + A_i^k)}{2} \left(\theta \frac{z_{i+1}^{k+1} - z_i^{k+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) \frac{z_{i+1}^k - z_i^k}{\Delta x} \right. \\ & \left. + \frac{\theta (j_{i+1}^{k+1} + j_i^{k+1}) + (1 - \theta)(j_{i+1}^k + j_i^k)}{2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

dove per l'equazione di continuità si è usata la forma (1) in cui non compare il termine b e si è assunto per semplicità $q_e = q_u = 0$. Le (22) e (23) formano un sistema di equazioni algebriche non lineari nelle variabili discretizzate Q e z , dato che A e j sono da considerarsi funzioni note di z ; per la risoluzione numerica del sistema può essere impiegato, ad esempio, il classico metodo iterativo di Newton-Raphson. Lo schema di Preissmann gode di alcune rilevanti proprietà: anzitutto risulta incondizionatamente stabile per $\theta > 0.5$ ed è accurato al primo ordine in x e t (per $\theta = \psi = 0.5$ è accurato al secondo ordine); inoltre, poiché le discretizzazioni delle variabili dipendenti e delle derivate coinvolgono solo punti di calcolo relativi a due sezioni adiacenti, il passo spaziale (cioè la distanza tra le sezioni di calcolo) può essere scelto variabile senza alterare l'ordine di accuratezza dello schema. Quest'ultima proprietà può rivelarsi assai utile nelle applicazioni ai corsi d'acqua naturali, quando ad esempio sia necessario descrivere in modo più preciso i tratti d'alveo che presentano l'andamento meno regolare, senza per questo appesantire inutilmente le elaborazioni con un infittimento indiscriminato della griglia di calcolo.

3. Calibrazione e verifica dei modelli di propagazione

Completata la formulazione del modello discreto per la topografia del corso d'acqua, occorre assegnare i valori dei parametri di origine empirica che compaiono nelle equazioni (indici di scabrezza, coefficienti relativi alle perdite di carico concentrate).

La sezione trasversale dei corsi d'acqua naturali è spesso costituita da parti diverse tra loro per forma, profondità e scabrezza; la parte centrale, più incisa, costituisce l'alveo di piena ordinaria, mentre le aree laterali (golene), spesso coperte da vegetazione ad alto fusto e delimitate dagli argini maestri, vengono occupate dalle acque in occasione degli eventi di piena più intensi. Poiché la scabrezza delle golene è nettamente superiore a quella dell'alveo di piena ordinaria, conviene svolgere i calcoli idraulici suddividendo l'intera sezione mediante rette verticali e calcolare la portata totale sommando i contributi delle varie sottosezioni così ottenute (Figura 3 a). In ciascuna sottosezione la portata viene valutata con le formule del moto uniforme, in cui il raggio idraulico viene calcolato assumendo come perimetro bagnato solo quello costituito dalle pareti solide e i valori della pendenza di fondo e della quota del pelo libero vengono assunti comuni a tutte le sottosezioni, cioè:

$$Q = \sum_i Q_i = \sum_i k_{si} R_i^{\frac{2}{3}} A_i i_0^{\frac{1}{2}} = K i_0^{\frac{1}{2}}, \quad K = \sum_i k_{si} R_i^{\frac{2}{3}} A_i, \quad (24)$$

dove K viene detta capacità di portata. Chiaramente le velocità medie calcolate per le varie sottosezioni risultano diverse tra loro; questo implica che, ammettendo il pelo libero orizzontale nel senso della larghezza, il carico totale risulta variabile nella sezione. D'altra parte, imponendo un valore costante per il carico totale si troverebbe una quota di pelo libero variabile nella sezione. Si vede dunque che quale che sia il metodo adottato la semplice ipotesi di moto monodimensionale conduce a palesi contraddizioni; le contraddizioni possono essere rimosse solo ipotizzando una distribuzione uniforme della velocità nella intera sezione. Questa ipotesi è normalmente accettabile; nel caso risultasse nella specifica situazione poco convincente occorrerebbe procedere nei calcoli idraulici con l'utilizzo di modelli bidimensionali.

Anche nel caso più semplice di sezioni di forma compatta accade ordinariamente che la scabrezza sia distribuita in modo non uniforme sul contorno; in particolare la

morfologia delle superfici delle sponde è spesso assai diversa da quella del fondo dell'alveo di magra. Dato però che nelle sezioni compatte le variazioni di velocità in direzione trasversale sono mediamente inferiori che nelle sezioni composite, si può valutare una scabrezza equivalente distribuita uniformemente sull'intero contorno.

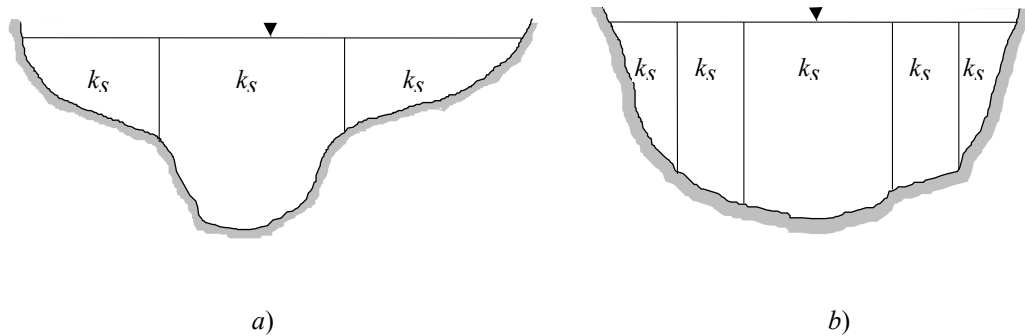


Figura 3 Parzializzazione delle sezioni composite e delle sezioni compatte

Il modo più semplice di procedere consiste nel suddividere il perimetro bagnato P in tratti P_i lungo i quali la scabrezza possa ritenersi approssimativamente omogenea, con valore dell'indice di scabrezza pari a k_{si} , e nell'imporre che la velocità media sia la stessa per tutte le sottosezioni così individuate (Figura 3 b); con questa ipotesi si trova per l'indice di scabrezza equivalente \bar{k}_s

$$\bar{k}_s = \left(\frac{P}{\sum_i \frac{P_i}{(k_{si})^{3/2}}} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (25)$$

Si può dunque scrivere, introducendo la capacità di portata K ,

$$Q = K i_0^{\frac{1}{2}}, \quad K = \bar{k}_s A R^{\frac{2}{3}}, \quad (26)$$

dove A e R indicano area e raggio idraulico dell'intera sezione bagnata. Va sottolineato che l'impiego di un indice di scabrezza equivalente per le sezioni composite non è giustificato, sebbene la quantità (25) possa essere formalmente definita anche in questo caso.

In prima approssimazione, per gli indici di scabrezza si possono assumere i valori reperibili in letteratura. In Tabella 1 sono riportati, ad esempio, alcuni valori consigliati per l'indice di scabrezza k_s della formula di Gaukler-Strickler.

Tabella 1 Valori dell'indice di scabrezza di Strickler

Natura delle pareti	k_s
Corsi d'acqua naturali	
Piccoli corsi d'acqua di pianura, puliti, diritti e senza ristagni d'acqua	30-40
Piccoli corsi d'acqua di pianura, puliti, sinuosi e senza ristagni d'acqua	22-30
tratti lenti con erbacce e stagni profondi	13-20

tratti molto erbosi con stagni profondi, notevolmente ostacolati da alberi e macchie	7-13
Fiumi di montagna, con fondo in ghiaia, ciottoli e pochi massi e lati ripidi	20-33
fiumi di montagna, con fondo in ciottoli e grossi massi, lati ripidi	14-25
Golene	
con erba	20-40
con aree coltivate	20-50
con sottobosco	14-29
con molti alberi	8-13
Grandi fiumi (larghezza in superficie maggiore di 30 m)	
sezione regolare, senza massi o vegetazione	17-40
sezione irregolare	10-29

Ovviamente tali valori sono puramente indicativi perché nelle applicazioni agli alvei naturali i materiali che compongono il fondo dell'alveo o il rivestimento delle sponde sono assai eterogenei. D'altra parte in occasione di eventi di piena le sezioni del corso d'acqua sono interessate da rilevanti fenomeni di modellazione, sicché la resistenza al moto varia con modalità che differiscono da piena a piena e per una stessa piena da istante a istante. L'aderenza del modello alla realtà va assicurata agendo sui parametri di scabrezza in modo tale che i risultati della simulazione di eventi precedenti (che abbiano interessato il tratto di fiume in studio) siano quanto più possibile vicini alle corrispondenti risultanze sperimentali; a questa operazione si dà il nome di taratura del modello. Più precisamente si deve ricercare l'accordo tra gli idrogrammi calcolati per le altezze d'acqua e i corrispondenti dati registrati nelle stazioni idrometrografiche situate lungo il fiume, quando tali dati, naturalmente, siano disponibili.

Spesso non sono disponibili registrazioni dei livelli idrici relativi ad eventi passati o perché lungo il corso d'acqua non si trovano stazioni idrometrografiche, oppure perché le stazioni esistenti sono andate distrutte durante gli eventi di piena. In questi casi non rimane che raccogliere tutte le informazioni possibili circa i valori massimi raggiunti dall'altezza d'acqua nei vari punti dell'area di interesse; questi dati possono essere facilmente desunti ad esempio dalle tracce lasciate dalle acque sugli edifici, sulle spalle dei ponti, sugli argini e su altre strutture.

Generalmente il fenomeno di piena è accompagnato dall'asportazione e movimentazione di una rilevante quantità di materiali solidi, sicché la morfologia dell'alveo e delle superfici interessate dal fenomeno è soggetta a modificazioni anche molto rapide. Si possono poi verificare sensibili riduzioni delle sezioni idriche a causa della ostruzione delle luci in corrispondenza delle opere di attraversamento che possono intercettare e trattenere parte del materiale trasportato dalla corrente; questi fenomeni, chiaramente non riproducibili da alcun modello, possono essere globalmente interpretati come un aumento delle resistenze al moto della corrente e fanno sì che i valori da imporre ai parametri di scabrezza per ottenere una ricostruzione accettabile dell'andamento temporale o dei valori massimi delle altezze d'acqua in fase di taratura siano assai più elevati rispetto a quelli attesi in base alle caratteristiche idrauliche dell'alveo.

Nelle ordinarie applicazioni è lecito di solito trascurare il contributo degli afflussi laterali distribuiti in quanto l'estensione delle relative aree contribuenti è generalmente piccola rispetto a quella del bacino di formazione della piena, mentre è opportuno

includere il termine di deflusso laterale associato alle tracimazioni lungo le linee di sponda in tutti i casi in cui non sia da escludere a priori la possibilità di esondazioni; per la valutazione della portata in uscita dall'alveo per unità di lunghezza della corrente vengono solitamente impiegate formule del tipo dell'afflusso a stramazzo o a battente o misto:

$$q_u = C_Q \sqrt{2g} [z - d(x)]^\alpha, \quad (27)$$

dove z e d indicano rispettivamente la quota del pelo libero e la quota della linea di sponda. I coefficiente di afflusso C_Q e l'esponente α assumono valori diversi a seconda delle situazioni da simulare; ad esempio, il deflusso per sormonto di un argine viene calcolato adottando la formula valida per lo stramazzo laterale in condizioni di moto permanente e attribuendo alla quota d della soglia dello stramazzo il valore della quota del ciglio dell'argine; si pone perciò nella (27) $\alpha = 3/2$, mentre per il coefficiente di afflusso si assume $C_Q = 0.38 \div 0.40$.

4. Condizioni iniziali e condizioni al contorno

Oltre alle caratteristiche topografiche del corso d'acqua, è necessario assegnare i dati che si riferiscono all'evento da simulare; questo si fa specificando le condizioni iniziali e le condizioni al contorno. Le prime vengono generalmente determinate tracciando nel tronco fluviale di interesse il profilo di moto permanente relativo al valore stimato per la portata transitante nel corso d'acqua prima del verificarsi dell'evento di piena. Un modo usuale di procedere è quello di iniziare la simulazione qualche tempo prima del periodo in cui ha interesse valutare il fenomeno (ad esempio alcune ore prima dell'effettivo inizio della piena) utilizzando le prime ore di simulazione per "inizializzare" correttamente il sistema, scartando poi i risultati ottenuti per questo periodo.

La condizione al contorno per la sezione di monte può essere fornita dall'andamento temporale dell'altezza d'acqua $y(t)$ quando siano disponibili registrazioni sufficientemente complete dell'evoluzione di tale grandezza durante tutto l'evento di piena. Negli altri casi non rimane che ricostruire l'andamento temporale $Q(t)$ delle portate nella sezione di monte a partire dai dati riguardanti gli afflussi meteorici al bacino corrispondente attraverso un modello idrologico afflussi-deflussi: la condizione al contorno per il modello di propagazione è data dalla $Q(t)$ stessa. Un caso in cui la $Q(t)$ è nota a priori è quello dello svuotamento di una diga tramite gli scarichi di fondo.

Per quanto riguarda la condizione al contorno di valle, l'andamento temporale delle altezze d'acqua può essere noto solo per gli eventi passati la cui simulazione è necessaria per la taratura e la verifica del modello; se invece si tratta di prevedere gli effetti prodotti dalla piena descritta dall'idrogramma assegnato a monte, non è possibile ricavare a priori l'espressione della $y(t)$ nella sezione di valle se non in pochissime situazioni: ad esempio quando il tratto di fiume in esame sbocca in un vaso che può essere considerato a livello costante ($y(t) = \text{cost}$) o in mare (nel qual caso la $y(t)$ è fornita dalla legge di marea). Dato che la relazione tra portate e livelli rappresentata dal coppia di piena varia da evento a evento, in tutti i casi in cui non è possibile imporre una condizione al contorno del tipo $y(t)$ non rimane che assumere nella sezione estrema la scala di deflusso del moto uniforme trascurando gli effetti di rigurgito dovuti allo scostamento dalla scala delle portate. D'altra parte tali effetti non sono di per sé rilevanti e in ogni caso si propagano verso monte riducendo progressivamente la loro intensità a causa delle resistenze al moto. Perciò gli errori introdotti nel modello a causa

delle imprecisioni nella rappresentazione delle condizioni al contorno possono essere resi arbitrariamente piccoli scegliendo la sezione estrema sufficientemente lontana dal tronco fluviale di interesse, in base ai valori dei parametri di scabrezza coinvolti.

5. Modelli di moto permanente

In molti casi, soprattutto quando il tronco fluviale in esame è breve in relazione ai tempi caratteristici delle piene, invece di simulare la propagazione a partire dall'idrogramma nella sezione di monte si può effettuare una simulazione di moto permanente con un valore di portata pari al valore di colmo dell'idrogramma.

Il moto permanente di una corrente a pelo libero quasi cilindrica prende anche il nome di moto gradualmente variato perché è caratterizzato da variazioni di forma, ed eventualmente di direzione, così lente da mantenere nelle singole sezioni le linee di corrente sensibilmente rettilinee e parallele tra loro. In queste condizioni la pressione varia con legge idrostatica su ciascuna sezione normale all'asse della corrente. Con le usuali modeste pendenze del fondo tali sezioni si possono confondere, come già ricordato a proposito del moto vario, con sezioni verticali.

In tali condizioni il carico totale, che ha il significato di energia per unità di peso del fluido, può essere scritto nella forma

$$H = h + \frac{U^2}{2g} = z_0 + y + \frac{U^2}{2g} . \quad (28)$$

Con riferimento a un tronco elementare di corrente di lunghezza dx si può scrivere

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -j - \frac{q_e U}{gA} , \quad (29)$$

dove il primo termine indica la perdita di carico per resistenze continue lungo il contorno, mentre il secondo termine indica la perdita di energia dovuta all'eventuale immissione laterale di una portata per unità di lunghezza pari a q_e . In presenza di singolarità (bruschi allargamenti o restringimenti, ecc. occorre aggiungere a secondo membro della (29) anche le corrispondenti perdite di carico. La valutazione della cadente j viene effettuata attraverso le formule stabilite per il moto uniforme, già descritte nel paragrafo 4.1. Introducendo il carico specifico E , ossia il carico totale riferito al punto più depresso della sezione, la (29) diviene

$$\frac{dE}{dx} = i_0 - j - \frac{q_e U}{gA} , \quad E = H - z_0 = y + \frac{U^2}{2g} . \quad (30)$$

Poiché in un alveo qualsiasi l'area A della sezione bagnata è funzione sia di y che dell'ascissa x si ha

$$\frac{dA}{dx} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial h} \frac{dh}{dx} = \frac{\partial A}{\partial x} + b \frac{dh}{dx} ; \quad (31)$$

eseguendo dunque la derivata spaziale nella (30), l'equazione differenziale del profilo del pelo libero assume la forma

$$\frac{dy}{dx} \left(1 - \frac{bQ^2}{gA^3} \right) - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial x} = i_0 - j . \quad (32)$$

Nel caso di alvei prismatici il secondo termine a primo membro è identicamente nullo.

Per il tracciamento del profilo di pelo libero occorre integrare la (32). L'unicità della soluzione è assicurata una volta che sia prescritta la condizione al contorno, ovvero l'altezza d'acqua in un punto del dominio di calcolo. La condizione al contorno deve essere imposta nella sezione di valle nel caso di corrente lenta e nella sezione di monte nel caso di corrente veloce.

E' bene osservare che il moto permanente può essere considerato un caso particolare di moto vario nel quale le variabili che definiscono lo stato della corrente, ad esempio y e U non dipendono dal tempo; ed infatti con tale ipotesi l'equazione del moto (2) si riduce all'equazione (32). Il profilo di moto permanente può dunque essere determinato integrando le equazioni del moto vario. Come si è ricordato nei paragrafi precedenti tale operazione richiede la conoscenza di due condizioni al contorno. Nel caso di corrente lenta una condizione al contorno va imposta nell'estremo di monte mentre l'altra va imposta nell'estremo di valle; nel caso di corrente veloce entrambe le condizioni al contorno vanno imposte nell'estremo di monte. Volendo dunque tracciare un profilo di moto permante, la condizione al contorno di monte è costituita dal valore di portata per il quale si desidera tracciare il profilo, mentre l'altra condizione al contorno è fornita dall'altezza d'acqua che corrisponde a quella portata nella sezione di monte o in quella di valle a seconda che la corrente è veloce o lenta. Generalmente la portata viene fatta crescere gradualmente sino al valore di interesse, che deve essere mantenuto per un periodo di tempo sufficiente a raggiungere una condizione di regime in tutto il dominio di calcolo.

Nel caso si voglia calcolare numericamente il profilo di moto permanente partendo direttamente dall'equazione (30), si procede alla discretizzazione della stessa scrivendola nella forma:

$$x_{i+1} - x_i = \frac{E_{i+1} - E_i}{i - J_m}, \quad (33)$$

dove E_{i+1} ed E_i sono le energie specifiche nelle sezioni x_{i+1} e x_i , i è la pendenza del fondo e J_m è la cadente media.

Come si è già detto il tracciamento del profilo avviene da monte verso valle per le correnti veloci e da valle verso monte per le correnti lente. Le condizioni al contorno devono essere quindi note a monte nel primo caso e a valle nel secondo. Il tracciamento del profilo può essere condotto sia suddividendo in n parti la differenza tra il livello y_0 di moto uniforme ed il livello y corrispondente alla condizione al contorno, sia imponendo un passo fisso Δx .

Nel primo caso per i valori y_i ed y_{i+1} si calcolano le grandezze E_i , E_{i+1} e J_m :

$$E_i = y_i + \frac{Q^2}{2gA(y_i)^2} \quad (34)$$

$$E_{i+1} = y_{i+1} + \frac{Q^2}{2gA(y_{i+1})^2}$$

La cadente J_m viene calcolata con l'espressione di Chezy:

$$J_m = \frac{Q^2}{A(y_m)^2 \chi^2 R(y_m)} \quad (35)$$

$$y_m = \frac{y_{i+1} + y_i}{2},$$

dove A è l'area della sezione trasversale della corrente, R è il raggio idraulico, i è la pendenza del fondo e χ il coefficiente di conduttanza di Chèzy ricavabile, ad esempio, con l'espressione di Strickler

$$\chi = k_s R(y_m)^{1/6} \quad (36)$$

ove k_s è, appunto, l'omonimo coefficiente i cui valori sono desumibili dalla Tabella 1.

Una volta note le suddette grandezze, si valuta attraverso la (33) il valore x_{i+1} .

Nel secondo caso, nota l'altezza y_i , si ipotizza un valore di y_{i+1} e si calcolano le grandezze E_i , E_{i+1} e J_m . Si calcola quindi la differenza di energia specifica $E_{i+1} - E_i$, e la si confronta con quella ottenibile dalla (33). Se la differenza tra le due quantità è superiore ad un ε scelto a priori, si tenta un secondo valore di y_{i+1} . La procedura viene ripetuta iterativamente fino a quando la suddetta condizione non viene verificata.

Questo metodo è più adatto per il calcolo del profilo di moto permanente negli alvei naturali in quanto è possibile eseguire il calcolo solo in quelle sezioni in cui sono note le caratteristiche geometriche e la scabrezza.

Se l'alveo presenta sezione e pendenza costanti (alveo prismatico), è possibile calcolare il livello idrico corrispondente alla portata di picco della piena di progetto semplicemente usando l'espressione del moto uniforme di Chezy:

Quando il fiume presenta dei tratti la cui curvatura non è trascurabile, si deve tenere conto del fatto che esiste un gradiente di livello idrico in direzione normale al moto della corrente. Il dislivello prodotto è esprimibile nel seguente modo:

$$\Delta = - \int_{ra}^{rb} \frac{v^2}{g \cdot r} \cdot dr, \quad (37)$$

dove v è la velocità della corrente a distanza r dal centro del cerchio osculatore ed rb ed ra sono le distanze delle curve esterna ed interna.

Riferimenti bibliografici

Chow V. T., *Open-Channel Hydraulics*, Mc Graw-Hill, New York (1959)

Chow V. T., Maidment D. R., Mays L. W., *Applied Hydrology*, Mc Graw-Hill, New York (1988)

Citrini D., Nosedà G., *Idraulica* (2^a ed.), Casa Editrice Ambrosiana, Milano (1987)

Cunge J. A., Holly Jr., F. M., Verwey A., *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*, Pitman Publishing Limited, London (1980)

Mahamood K., Yevjevich V. (eds), *Unsteady Flow in Open Channels*, Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado (1975)

Maione U., *Le piene fluviali*, La Goliardica Pavese, Pavia (1996)

Maione U., *La sistemazione dei corsi d'acqua montani*, Editoriale Bios, Cosenza (1998)

Marchi E., Rubatta A., *Meccanica dei fluidi*, Utet, Torino (1981)

Moisello U., *Idrologia Tecnica*, La Goliardica Pavese, Pavia (1998)

Preissmann A., Cunge J., *Calcul du mascaret sur machines electroniques*, La Houille Blanche, n.5 (1961)